Lycée Vaucanson
Tours

Automatique – Asservissement 1

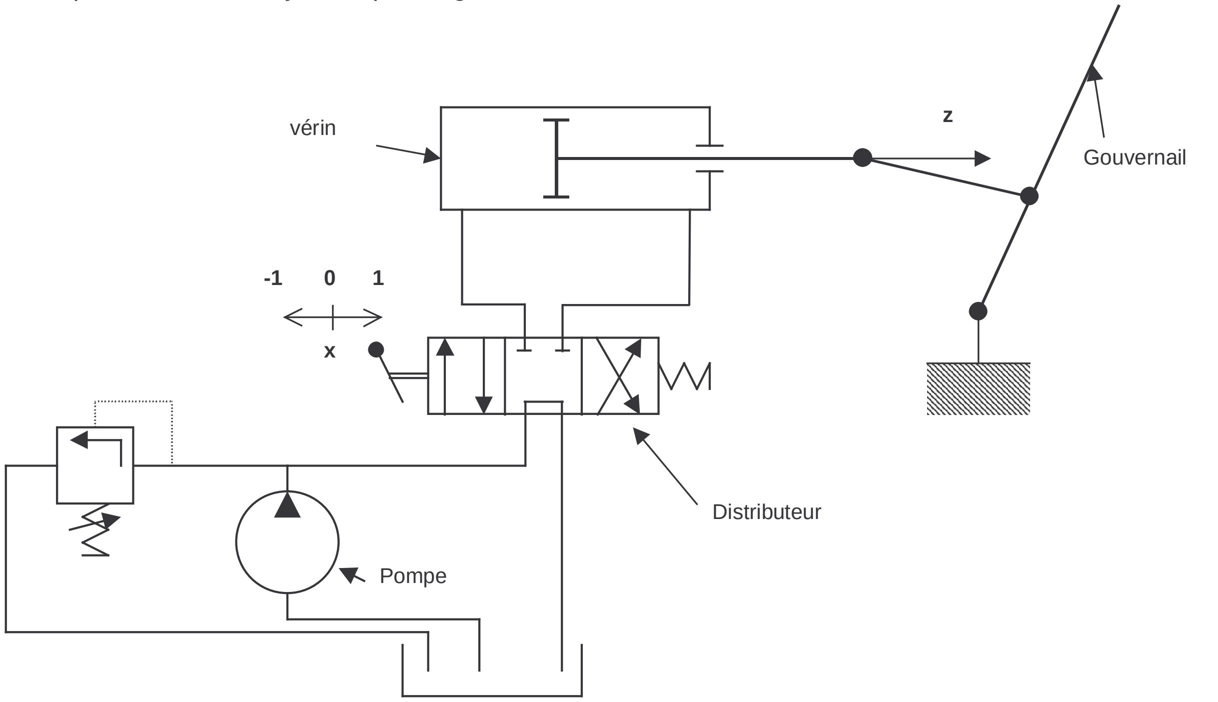
Philippe Bourzac
2006

AUTOMATIQUE - ASSERVISSEMENT

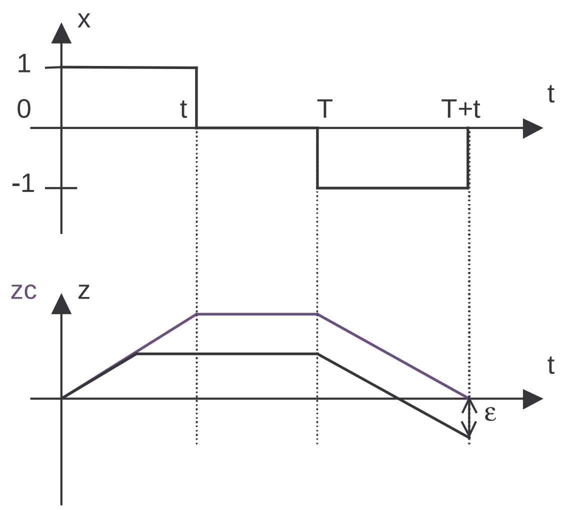
Objectif : Définir un système asservi, présenter les avantages et les caractéristiques, introduire les outils d'analyse et de modélisation.

1. Insuffisance des systèmes commandés.

Exemple : commande hydraulique de gouvernail



Dans cet exemple, la position du distributeur au cours du temps détermine le sens de déplacement de la tige du vérin.

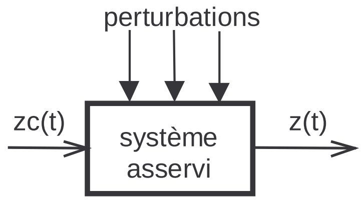


Intérêt d'un système commandé : amplification de puissance.
Défaut du système : sensibilité aux perturbations.
En fonction de l'effort qui s'opposera à la manœuvre du gouvernail, le débit d'alimentation du vérin variera (un blocage du gouvernail conduit à un débit d'alimentation nul).
Il existe un écart **ε** entre la position souhaitée **zc** et la position réelle **z** : $\varepsilon = zc - z$

Le système n'est pas fidèle. Il fonctionne en boucle ouverte.

2. Les systèmes asservis - Généralités.

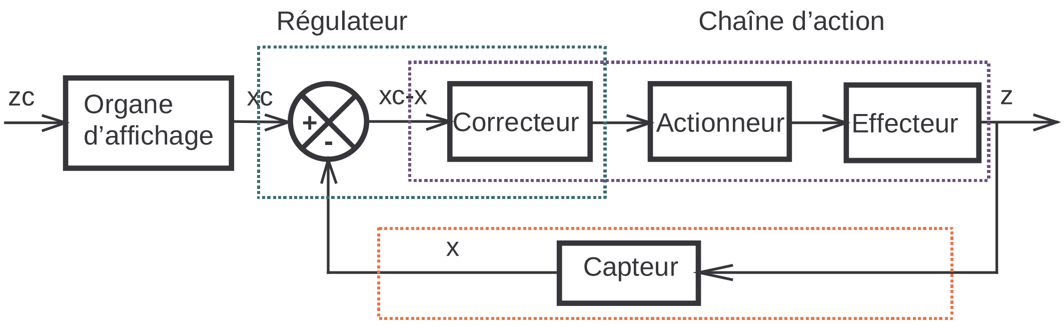
Définition : Un système est dit asservi lorsque la grandeur de sortie suit aussi précisément que possible les variations de la grandeur d'entrée (ordre ou consigne) quels que soient les effets perturbateurs extérieurs.



Fonctions d'un système asservi :

- Observation de l'état du système
  ➔ Utilisation de capteur.
- Comparaison – Réflexion
  ➔ L'état mesuré est comparé à l'état souhaité et la modification éventuelle de la commande est déterminée. L'organe qui réalise ces deux fonctions est appelé régulateur. Il est composé d'un comparateur ou soustracteur et d'un correcteur.
- Action
  ➔ L'actionneur apporte la puissance nécessaire à la réalisation de la tâche.

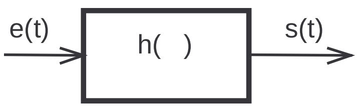
Schéma fonctionnel d'un système asservi élémentaire



où : zc est la grandeur d'entrée ou la consigne
z est la grandeur de sortie
x est la mesure
xc est l'image de zc, homogène à x
xc-x est l'erreur

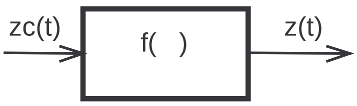
Le système fonctionne en boucle fermée.

Transmittance ou fonction de transfert.
A chaque composant du système asservi est associée une fonction de transfert.



avec s(t)=h[e(t)] où h( ) est la fonction de transfert du composant

Au système asservi est associée une fonction de transfert qui dépend des transmittances des composants qui constituent le système.



avec z(t)=f[zc(t)]

Distinction

Système régulé : la grandeur d'entrée est fixe dans le temps (ex : pilote automatique de bateau).

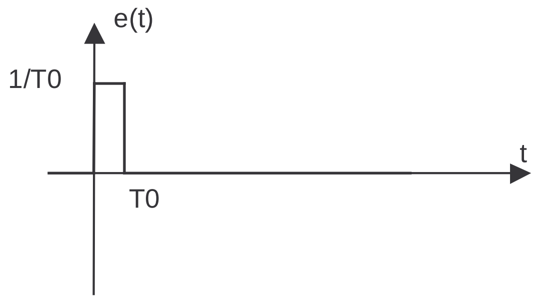
Système asservi ou suiveur : la grandeur d'entrée varie dans le temps (ex : radar de poursuite).

3. Caractéristiques dynamiques d'un système asservi.

Les caractéristiques dynamiques permettent de quantifier les performances du système asservi. Elles sont appréciées à partir de la réponse du système à des entrées « types ».

Entrées « types ».

- Impulsion ou Dirac



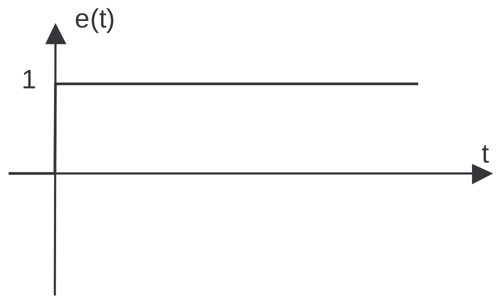
e(t)=0 pour t<0 et t>T0

e(t)=1/T0 pour 0≤ t ≤T0

avec T0 → 0

on note e(t)=δ(t)

- Echelon unitaire ou fonction existence

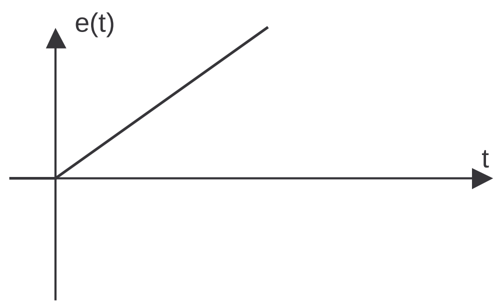


e(t)=0 pour t<0

e(t)=1 pour t≥0

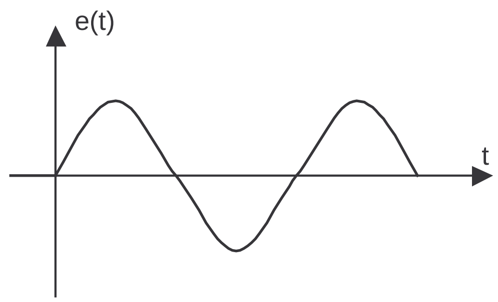
on note e(t)=u(t)

- Rampe



e(t)=a.t.u(t) où a constante

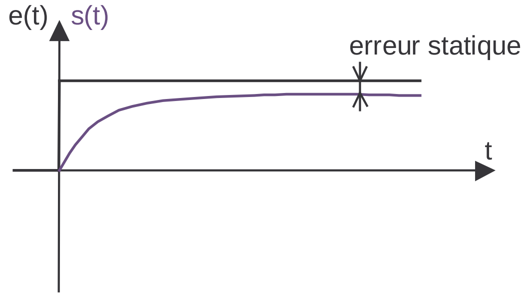
- Harmonique

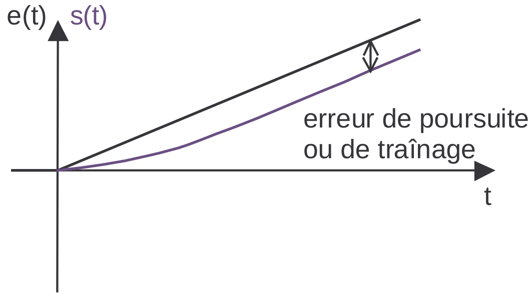


e(t)=sinωt.u(t)

Performances :

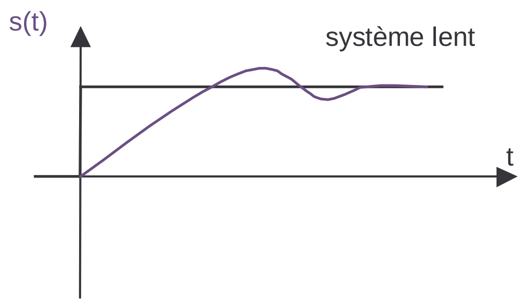
- La **précision** quantifie l'erreur lorsque l'équilibre est atteint.

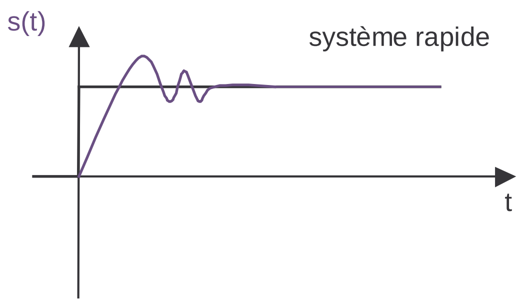




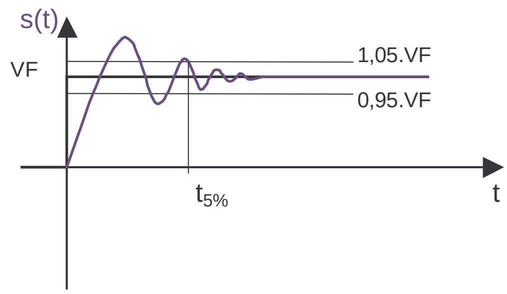
avec e(t) et s(t) de même nature. Autrement, l'erreur est mesurée en sortie du comparateur.

- La **rapidité** quantifie le temps de réponse du système

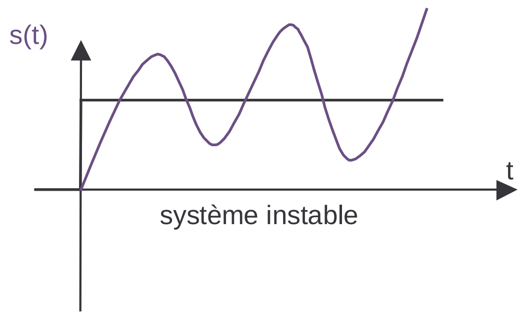


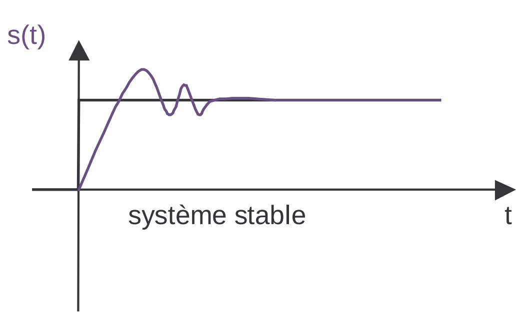


Le temps mis par la réponse pour atteindre à moins de 5% la valeur finale est retenu comme critère de rapidité : $t_{5\%}$



- La **stabilité** d'un système est la capacité à converger vers une valeur constante lorsque l'entrée est constante, et en l'absence de perturbation.



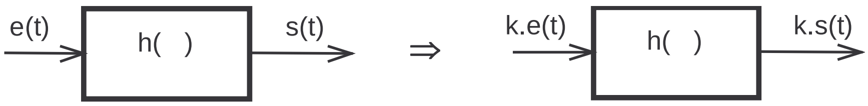


4. Systèmes linéaires, continus et invariants.

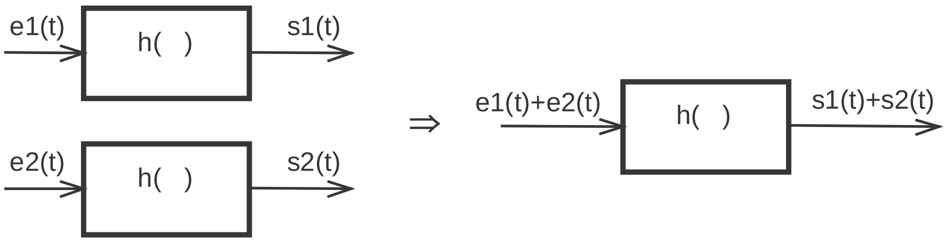
C'est l'outil de modélisation retenu pour décrire le comportement des systèmes asservis.

- **Linéaire :** les systèmes étudiés respectent les deux principes suivants :

Principe de proportionnalité :

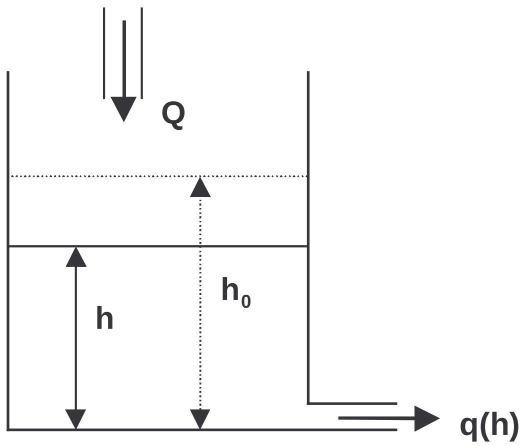


Principe de superposition:



Remarque : les systèmes réels ont rarement un comportement linéaire.

Exemple : Ecoulement d'un réservoir



En sortie, la vitesse du fluide est donnée par : $V = \sqrt{2gh}$ *(comportement non linéaire).*

Le débit de sortie est donc : $q(h) = s.\sqrt{2gh}$ *où s est la section de passage.*

La conservation du débit permet d'écrire :

$$S\frac{dh}{dt} = Q - s.\sqrt{2gh}$$

Linéarisation autour de la position d'équilibre donnée par $Q = q(h_0) = s.\sqrt{2gh_0}$.

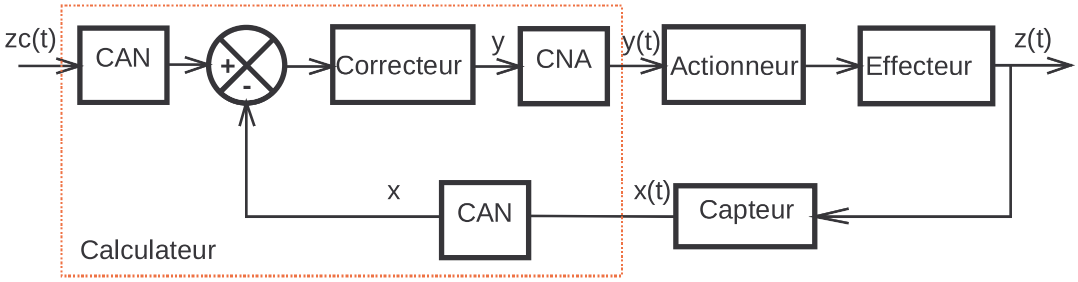
On pose $h(t) = h_0 + \varepsilon(t)$. *La conservation du débit s'écrit alors :* $S\frac{dh}{dt} = Q - s.\sqrt{2g}.\sqrt{h_0 + \varepsilon(t)}$

Un développement limité à l'ordre 1 de $\sqrt{h_0 + \varepsilon(t)} \approx \sqrt{h_0}.\left(1 + \frac{\varepsilon(t)}{2h_0}\right)$ *nous permet de trouver l'équation différentielle qui traduit le comportement linéaire autour de la position d'équilibre :*

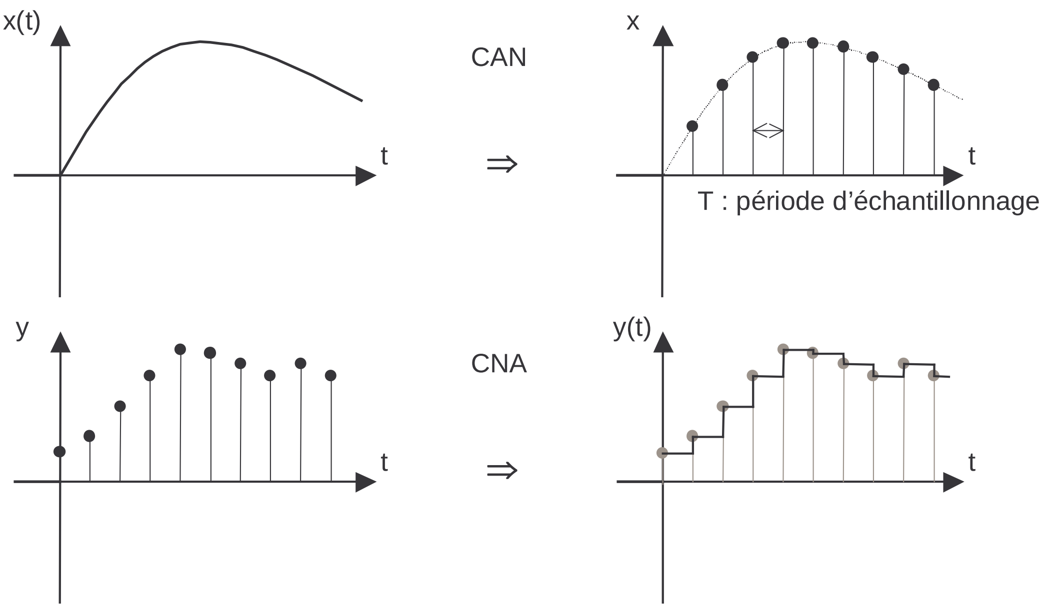
$$S\frac{dh}{dt} + \frac{Q}{2h_0}h = \frac{Q}{2}$$

- **Continu :** les grandeurs étudiées sont définies pour toute valeur du temps et sur l'ensemble de leur plage de variation.

Remarque : les systèmes utilisant un calculateur comme commande sont appelés discrets ou échantillonnés.



Des convertisseurs Analogique - Numérique transforment en nombres les grandeurs d'entrée et mesurée à un instant donné. Les informations sont, ensuite, traitées. Puis, un convertisseur Numérique – Analogique transforme l'ordre pour qu'il puisse être interpréter par l'actionneur.
Ces opérations sont exécutées à une certaine fréquence.



- **Invariant :** le système ne vieillit pas (le système aura le même comportement à une entrée donnée à des instants différents). Les transmittances ne dépendent pas du temps.

5. Représentation des systèmes linéaires, continus et invariants.

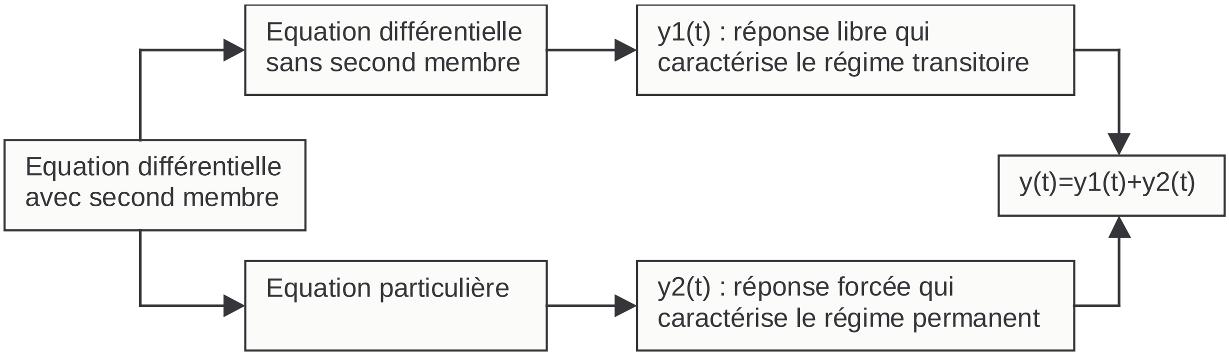
Il sont représentés par une équation différentielle à coefficients constants.

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + ... + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + ... + b_0 x$$

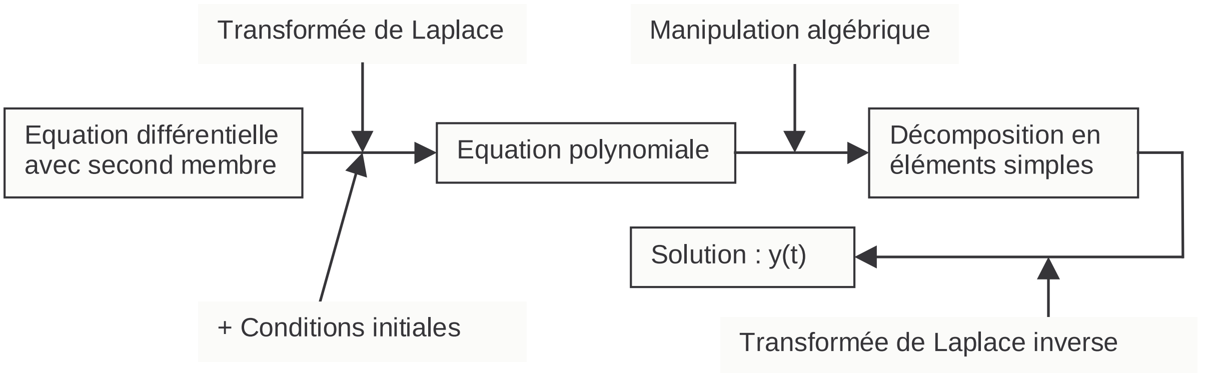
Les systèmes réels étudiés impliquent m≤n. **n est l'ordre du système**.

La résolution de cette équation différentielle permet de connaître la réponse théorique du système à une entrée fixée. Ce n'est qu'un modèle.

- ***Technique de résolution classique.***



- ***Technique utilisée par les automaticiens :*** elle repose sur les transformées de Laplace.



6. La transformée de Laplace et ses applications.

Définition : La transformée de Laplace de la fonction f(t), telle que f(t)=0 pour t<0 est :

$$f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{L}(f(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \quad \text{où } p \in \forall$$

Cette transformation permet de passer du domaine temporel dans le domaine de Laplace ou symbolique.

Propriétés.

Linéarité	$[a.f1(t)+b.f2(t)].u(t)$	$a.F1(p)+b.F2(p)$
Dérivation	$f'(t).u(t)$ $f''(t).u(t)$	$p.F(p)-f(0^+)$ $p^2.F(p)-p.f(0^+)-f'(0^+)$
Intégration	$\int_0^t f(x)dx.u(t)$	$\dfrac{F(p)}{p}$
Retard	$f(t-T).u(t-T)$	$e^{-Tp}.F(p)$
Facteur d'échelle	$f(at).u(t)$ où a≠0	$\dfrac{1}{a}.F\left(\dfrac{p}{a}\right)$
Amortissement	$e^{-at}f(t).u(t)$ où a=cte	$F(p+a)$

Multiplication par t^n	$t^n f(t).u(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^n F(p)}{dp^n}$
Valeur initiale	$\lim_{t\to 0^+} f(t)$	$\lim_{p\to +\infty} pF(p)$
Valeur finale	$\lim_{t\to +\infty} f(t)$	$\lim_{p\to 0^+} pF(p)$

Transformées usuelles.

$f(t)u(t)$	$F(p)$	$f(t)u(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
K	$\dfrac{K}{p}$	$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
Kt	$\dfrac{K}{p^2}$	$\mathrm{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{p+a}$	$\mathrm{ch}\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$1-e^{-t/\tau}$	$\dfrac{1}{p(1+\tau p)}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{at}t^n$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$		

$f(t)u(t)$	$F(p)$
$\dfrac{\omega_0}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_0 t} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}\,t\right)$	$\dfrac{1}{1+2z\dfrac{p}{\omega_0}+\left(\dfrac{p}{\omega_0}\right)^2}$ avec z<1
$1-\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega_0 t} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}\,t+\varphi\right)$ avec $\sin\varphi=\sqrt{1-z^2}$ et $\cos\varphi = z$	$\dfrac{1}{p\left(1+2z\dfrac{p}{\omega_0}+\left(\dfrac{p}{\omega_0}\right)^2\right)}$ avec z<1

Transmittance ou fonction de transfert d'un système dans le domaine de Laplace.
On applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle.

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \ldots + b_0 x$$

$$\mathscr{L} \Downarrow$$

$$\left[a_n p^n + \ldots + a_0\right].Y(p) = \left[b_m p^m + \ldots + b_0\right].X(p) + C_0(p)$$

où $X(p) = \mathscr{L}(x(t))$ et $Y(p) = \mathscr{L}(y(t))$
$C_0(p)$ est un polynôme qui dépend des conditions initiales

La réponse dans le domaine de Laplace s'écrit : $Y(p) = \dfrac{b_m p^m + \ldots + b_0}{a_n p^n + \ldots + a_0} X(p) + \dfrac{C_0(p)}{a_n p^n + \ldots + a_0}$

La fonction de transfert du système dans le domaine de Laplace est : $H(p) = \dfrac{b_m p^m + \ldots + b_0}{a_n p^n + \ldots + a_0}$.

La fonction de transfert caractérise le comportement du système indépendamment de l'entrée. Elle est propre au système.

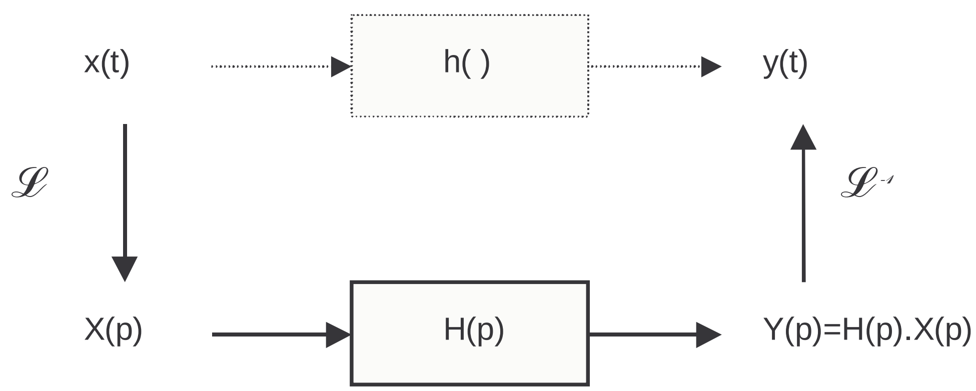
Cas particulier : si toutes les conditions initiales sont nulles, conditions dites d'Heaviside, la fonction de transfert s'écrit : $H(p) = \dfrac{Y(p)}{X(p)}$.

Application à la résolution des équations différentielles.

Données : Equation différentielle.
Entrée temporelle du système x(t).
Conditions initiales nulles (c'est le plus souvent le cas).

Objectif : Recherche de la réponse temporelle du système y(t).

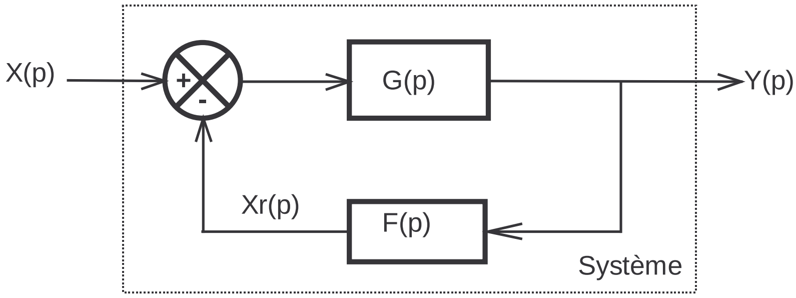
Démarche : 1° calcul de la fonction de transfert H(p).
2° calcul de l'entrée dans le domaine de Laplace X(p).
3° calcul de la sortie dans le domaine de Laplace Y(p).
4° calcul de la sortie temporelle en appliquant la tr ansformée de Laplace inverse y(t).



Le calcul de la transformée de Laplace inverse de Y(p) nécessite une décomposition en éléments simples dont les transformées inverses sont connues.

7. Les schémas fonctionnels ou schémas blocs.

Les schémas fonctionnels sont utilisés avec les transformées de Laplace.



où G(p) est la fonction de transfert de la chaîne d'action
F(p) est la fonction de transfert de la chaîne de réaction

Les règles d'écriture des schémas fonctionnels sont les suivantes :

- Les branches représentent les variables.
- Les blocs représentent les transmittances.
- Les sommateurs additionnent algébriquement les variables.
- Les jonctions servent à prélever les valeurs des variables.

Calcul de la fonction de transfert H(p) du système à partir du schéma fonctionnel :

$$[X(p)-Xr(p)].G(p)=Y(p) \quad soit \quad G(p)X(p)=Y(p).[1+F(p)G(p)]$$

$$H(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{G(p)}{1+G(p)F(p)}$$

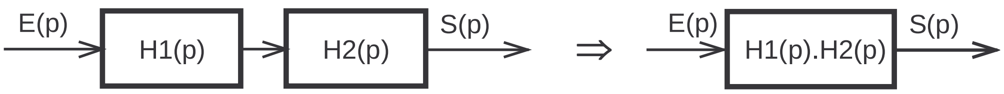
H(p) est aussi appelé la Fonction de Transfert en Boucle Fermée : FTBF
G(p)F(p) est appelé la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte : FTBO
G(p) est appelé la fonction de transfert de la chaîne d'action

En résumé : $$H(p)=FTBF=\frac{Chaîne\ d'action}{1+FTBO}.$$

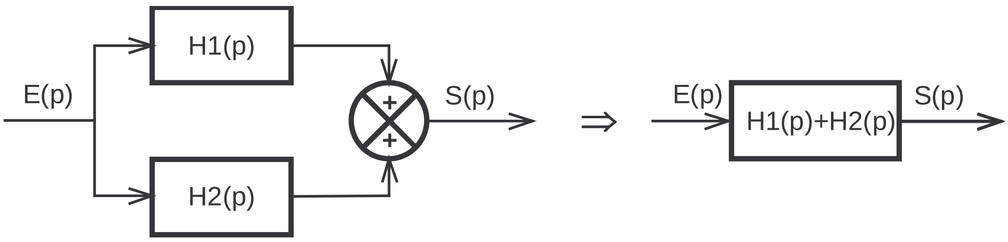
Manipulations sur les schémas fonctionnels.

Les schémas fonctionnels ne sont pas toujours de structure simple. Des manipulations peuvent permettre de réduire leur complexité.

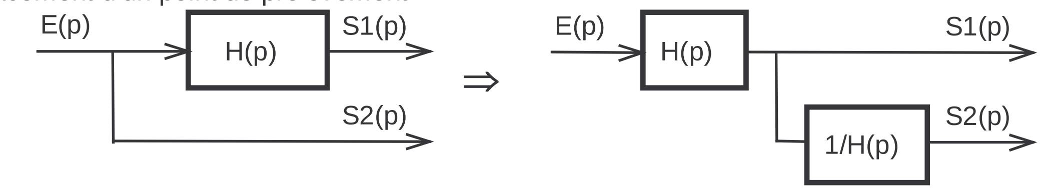
Transmittances en série



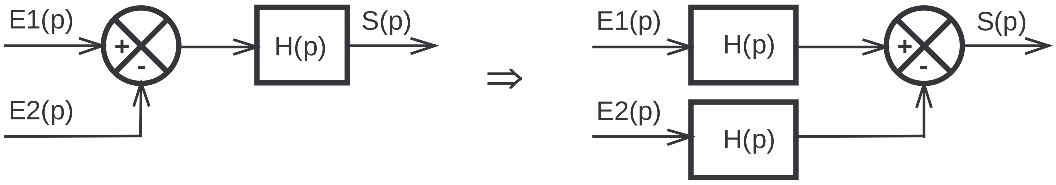
Transmittances en parallèle



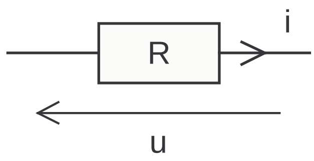
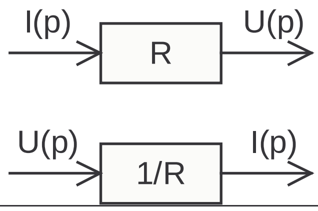
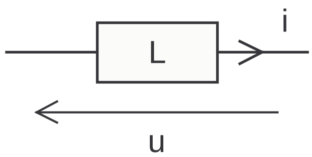
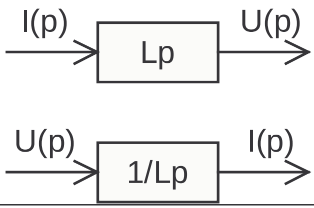
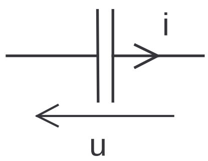
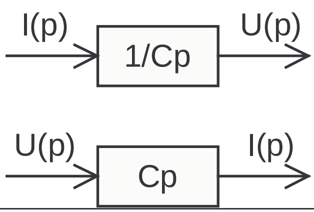
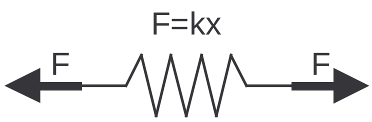
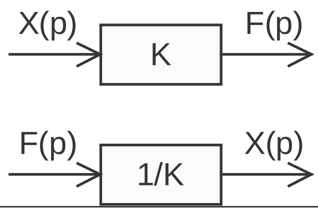
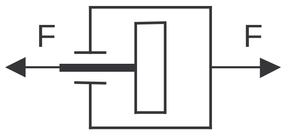
Déplacement d'un point de prélèvement

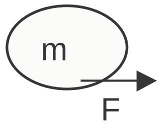
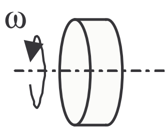


Déplacement d'un soustracteur



Principales transmittances.

Résistance	 u=Ri	
Inductance	 $u = L\frac{di}{dt}$	
Condensateur	 $u = \frac{1}{C}\int idt$	
Ressort		
Frottement visqueux (amortisseur)	 $F = fv\frac{dx}{dt}$	

Masse	 $F = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$	$X(p) \longrightarrow \boxed{m.p^2} \longrightarrow F(p)$
Inertie en rotation	 $C = J\dfrac{d\omega}{dt}$	$\Omega(p) \longrightarrow \boxed{J.p} \longrightarrow C(p)$

Etude temporelle des systèmes du premier ordre.

a) Définition

Un système physique d'entrée e(t) et de sortie s(t) est du 1er ordre, si il est régi par une équation différentielle du 1er ordre à coefficients constants :

$$\boxed{\tau\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t)}$$

où K est le gain statique du système
τ est la constante de temps en s

Si les conditions initiales sont nulles (s(0)=0), la fonction de transfert dans le domaine de Laplace s'écrit : $(\tau p + 1).S(p) = K.E(p)$

Soit $\boxed{H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{K}{1+\tau p}}$.

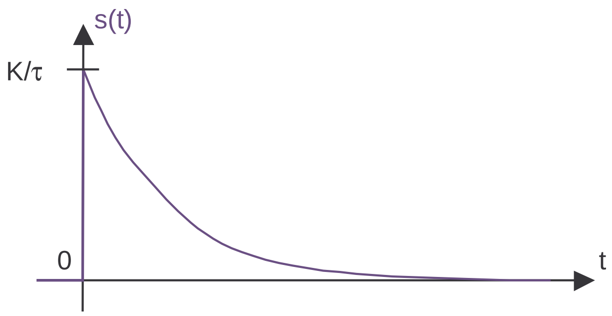
b) Réponse impulsionnelle.

L'entrée est définie par $e(t) = \delta(t)$, soit dans le domaine de Laplace $E(p) = 1$.

La sortie a donc pour expression dans le domaine de Laplace : $S(p) = \dfrac{K}{1+\tau p} = \dfrac{\frac{K}{\tau}}{\frac{1}{\tau}+p}$.

La réponse temporelle a donc pour expression : $\boxed{s(t) = \dfrac{K}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)}$.

Représentation graphique.



c) Réponse indicielle.

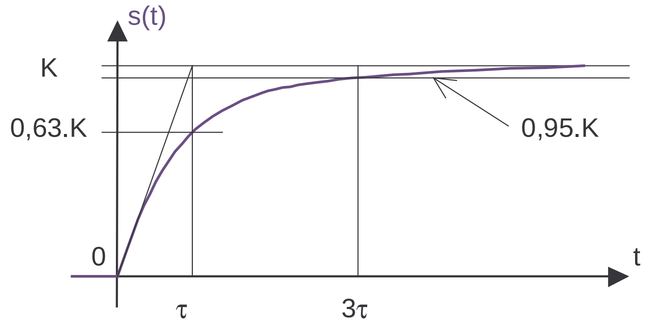
L'entrée est définie par $e(t)=u(t)$, soit dans le domaine de Laplace $E(p)=\frac{1}{p}$.

La sortie a donc pour expression dans le domaine de Laplace : $S(p)=\frac{K}{(1+\tau p)p}$.

Une décomposition en éléments simples nous donne : $S(p)=\frac{A}{p}+\frac{B}{1+\tau p}=\frac{K}{p}-\frac{K\tau}{1+\tau p}$

La réponse temporelle a donc pour expression : $\boxed{s(t)=K\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)}$.

Représentation graphique.



Particularités.

- Pente à l'origine.

$s'(t)=\frac{K}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$ d'où $\boxed{\lim_{t\to 0^+} s'(t)=\frac{K}{\tau}}$

- Temps de réponse à 5%.

On cherche $t_{5\%}$ tel que $s(t_{5\%})=0{,}95.K$

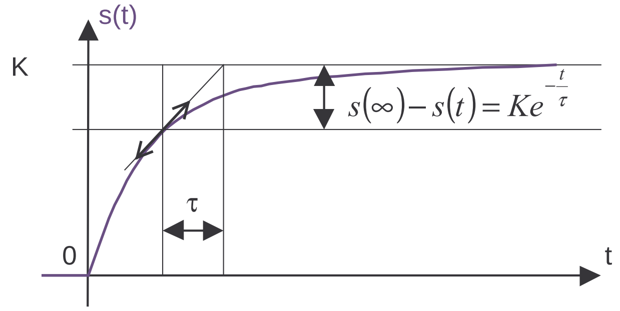
$\rightarrow \quad 0{,}05=e^{-\frac{t_{5\%}}{\tau}}$ soit $\ln 0{,}05=-\frac{t_{5\%}}{\tau}$

$\rightarrow \quad \boxed{t_{5\%}\approx 3\tau}$

Détermination expérimentale des paramètres du modèle d'ordre 1.

- Utiliser la valeur finale pour déterminer le gain K.
- Utiliser la pente à l'origine pour déterminer la constante de temps τ.
  Utiliser 63% de la valeur finale pour déterminer la constante de temps τ.

  Utiliser un instant t quelconque en ayant remarqué que $s(\infty)-s(t)=Ke^{-\frac{t}{\tau}}$ et donc que $s'(t)=\frac{s(\infty)-s(t)}{\tau}$.



8. Etude temporelle des systèmes du deuxième ordre.

a) Définition

Un système physique d'entrée e(t) et de sortie s(t) est du 2ème ordre, si il est régi par une équation différentielle du 2ème ordre à coefficients constants :

$$\boxed{\left(\frac{1}{\omega_0^{\,2}}\right).\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2z}{\omega_0}.\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K.e(t)}$$

où K est le gain statique du système
ω_0 est la pulsation propre non amortie >0 en rad/s
z est le coefficient d'amortissement >0

Si les conditions initiales sont nulles (s(0)=s'(0)=0), la fonction de transfert dans le domaine de Laplace s'écrit : $\left(\frac{1}{\omega_0^{\,2}}p^2+\frac{2z}{\omega_0}p+1\right).S(p)=K.E(p)$

Soit $\boxed{H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K\omega_0^{\,2}}{p^2+2z\omega_0p+\omega_0^{\,2}}=\frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^{\,2}}+\frac{2z}{\omega_0}p+1}}$.

b) Réponse impulsionnelle.

L'entrée est définie par $e(t)=\delta(t)$, soit dans le domaine de Laplace $E(p)=1$.

La sortie a donc pour expression dans le domaine de Laplace : $S(p)=\frac{K\omega_0^{\,2}}{p^2+2z\omega_0p+\omega_0^{\,2}}$.

Discriminant : $\Delta=4\omega_0^{\,2}(z^2-1)$.

Cas 1 : Z>1, le système est amorti et le dénominateur possède deux racines réelles.

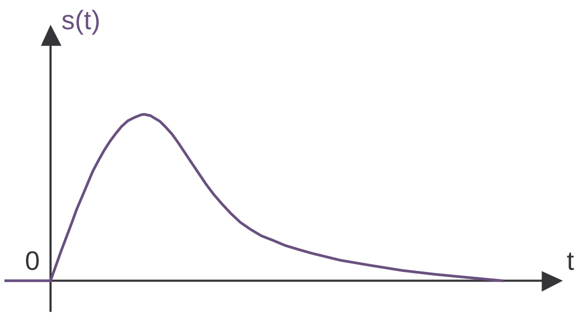
$$p_{1/2}=\omega_0\left(-z\pm\sqrt{z^2-1}\right)<0$$

$S(p)$ se décompose en deux éléments simples : $S(p)=\frac{K\omega_0^{\,2}}{(p-p_1)(p-p_2)}=\frac{A}{p-p_1}+\frac{B}{p-p_2}$.

Après identification, on trouve : $A=-B=\frac{K\omega_0}{2\sqrt{z^2-1}}$

La réponse temporelle a donc pour expression : $\boxed{s(t)=\frac{K\omega_0}{2\sqrt{z^2-1}}\left(e^{p_1t}-e^{p_2t}\right)}$.

Représentation graphique.



Cas 2 : Z=1, amortissement critique. La sortie dans le domaine de Laplace s'écrit : $S(p)=\frac{K\omega_0{}^2}{(p+\omega_0)^2}$

La réponse temporelle a donc pour expression : $\boxed{s(t)=K\omega_0{}^2 e^{-\omega_0 t}t}$.

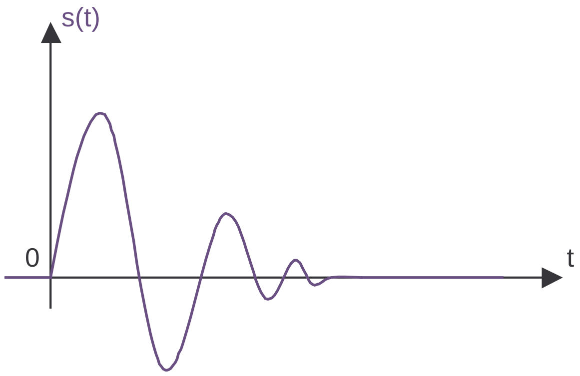
Cas 3 : Z<1, le système est sous-amorti et le dénominateur possède deux racines complexes conjuguées.

$$p_{1/2}=\omega_0\left(-z\pm j\sqrt{1-z^2}\right)$$

La réponse temporelle a donc pour expression : $s(t)=\frac{K\omega_0}{2\sqrt{z^2-1}}\left(e^{p_1 t}-e^{p_2 t}\right)$.

Soit, après développement des exponentielles complexes : $\boxed{s(t)=\frac{K\omega_0}{\sqrt{1-z^2}}e^{-\omega_0 z t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}\,t\right)}$

Représentation graphique.



c) Réponse indicielle.

L'entrée est définie par $e(t)=u(t)$, soit dans le domaine de Laplace $E(p)=\frac{1}{p}$.

La sortie a donc pour expression dans le domaine de Laplace : $S(p)=\frac{K\omega_0{}^2}{\left(p^2+2z\omega_0 p+\omega_0{}^2\right)p}$.

Cas 1 : Z>1, le système est amorti et la réponse est apériodique.

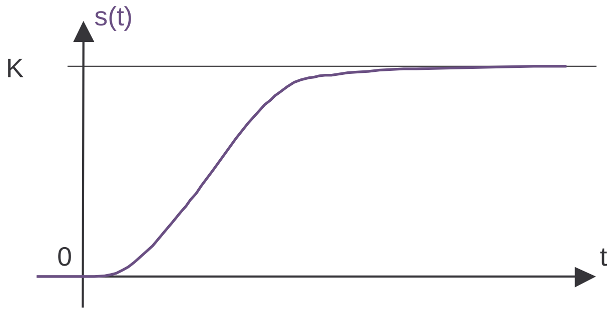
$S(p)$ se décompose en trois éléments simples : $S(p)=\frac{K\omega_0{}^2}{(p-p_1)(p-p_2)p}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-p_1}+\frac{C}{p-p_2}$.

Avec $A=K$; $B=\frac{K\omega_0{}^2}{(p_1-p_2)p_1}=\frac{K\omega_0{}^2}{2\omega_0\sqrt{z^2-1}.p_1}$ et $C=\frac{K\omega_0{}^2}{(p_2-p_1)p_2}=-\frac{K\omega_0{}^2}{2\omega_0\sqrt{z^2-1}.p_2}$

La réponse temporelle a donc pour expression : $\boxed{s(t)=K\left[1-\frac{\omega_0}{2\sqrt{z^2-1}}\left(\frac{e^{p_2 t}}{p_2}-\frac{e^{p_1 t}}{p_1}\right)\right]}$.

Si on pose : $p_1=-\frac{1}{\tau_1}$ et $p_2=-\frac{1}{\tau_2}$ où τ_1 et τ_2 sont les constantes de temps, la réponse temporelle s'écrit : $\boxed{s(t)=K\left[1-\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\right]}$

Représentation graphique.



Particularités.

- Pente à l'origine.

$s'(t)=\dfrac{K\omega_0}{2\sqrt{z^2-1}}\left(e^{p_1t}-e^{p_2t}\right)$ d'où $\boxed{\lim_{t\to 0^+} s'(t)=0}$

- Temps de réponse à 5%.

Il n'y a pas de formule simple.

Cas 2 : Z=1, amortissement critique. La sortie dans le domaine de Laplace s'écrit :
$S(p)=\dfrac{K\omega_0{}^2}{(p+\omega_0)^2\,p}=\dfrac{-K\omega_0}{(p+\omega_0)^2}+\dfrac{-K}{p+\omega_0}+\dfrac{K}{p}$

La réponse temporelle a pour expression : $\boxed{s(t)=K\left(1-(1+\omega_0t)e^{-\omega_0t}\right)}$.

Particularités.

- Pente à l'origine.

$s'(t)=Ke^{-\omega_0t}\left(\omega_0(1+\omega_0t)-\omega_0\right)=K\omega_0^2te^{-\omega_0t}$ d'où $\boxed{\lim_{t\to 0^+} s'(t)=0}$

- Temps de réponse à 5%.

Il n'y a pas de formule simple.

Cas 3 : Z<1, le système est sous-amorti et la réponse est pseudo-périodique.

La sortie a toujours pour expression dans le domaine de Laplace : $S(p)=\dfrac{K\omega_0{}^2}{\left(p^2+2z\omega_0p+\omega_0{}^2\right)p}$. On décompose cette expression sous la forme : $S(p)=\dfrac{A}{p}+\dfrac{Bp+C}{p^2+2z\omega_0p+\omega_0{}^2}$. Après identification des constantes, on trouve : $S(p)=\dfrac{K}{p}-\dfrac{Kp+2Kz\omega_0}{p^2+2z\omega_0p+\omega_0{}^2}$. On modifie le dénominateur d'ordre 2 pour faire apparaître un carré parfait :

$$S(p)=\frac{K}{p}-\frac{Kp+2Kz\omega_0}{p^2+2z\omega_0p+z^2\omega_0{}^2-z^2\omega_0{}^2+\omega_0{}^2}=\frac{K}{p}-\frac{Kp+2Kz\omega_0}{(p+z\omega_0)^2+\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}\right)^2}$$

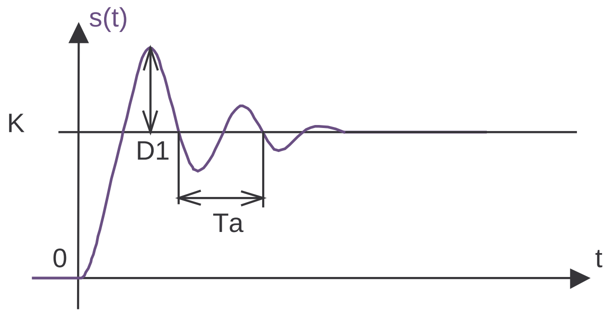
Une nouvelle transformation permet d'identifier les transformées de Laplace des cosinus et sinus amortis : $S(p)=K\left[\dfrac{1}{p}-\dfrac{p+z\omega_0}{(p+z\omega_0)^2+\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}\right)^2}-\dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}\dfrac{\omega_0\sqrt{1-z^2}}{(p+z\omega_0)^2+\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}\right)^2}\right]$

La réponse dans le domaine temporel s'écrit donc :

$s(t)=K\left[1-e^{-z\omega_0 t}\cos\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t\right)-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t\right)\right]$. On pose $\cos\varphi=z$ et $\sin\varphi=\sqrt{1-z^2}$

La réponse temporelle s'écrit : $\boxed{s(t)=K\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t+\varphi\right)\right]}$

Représentation graphique.



Particularités.

- Pseudo-période.

La réponse présente des oscillations amorties dont la période, appelée pseudo-période, est :

$Ta=\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}=\frac{2\pi}{\omega_a}$ où $\omega_a=\omega_0\sqrt{1-z^2}$ est la pulsation amortie.

- Pente à l'origine.

$s'(t)=\frac{K\omega_0}{\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t\right)$ donc $\boxed{\lim_{t\to0^+}s'(t)=0}$ et la pente est nulle.

- Dépassements relatifs transitoires.

Les dépassements relatifs sont donnés pour les instants t_k tels que $s'(t_k)=0$.

Donc $t_k=k\frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$ avec k entier.

On définit le dépassement relatif d'ordre k par :

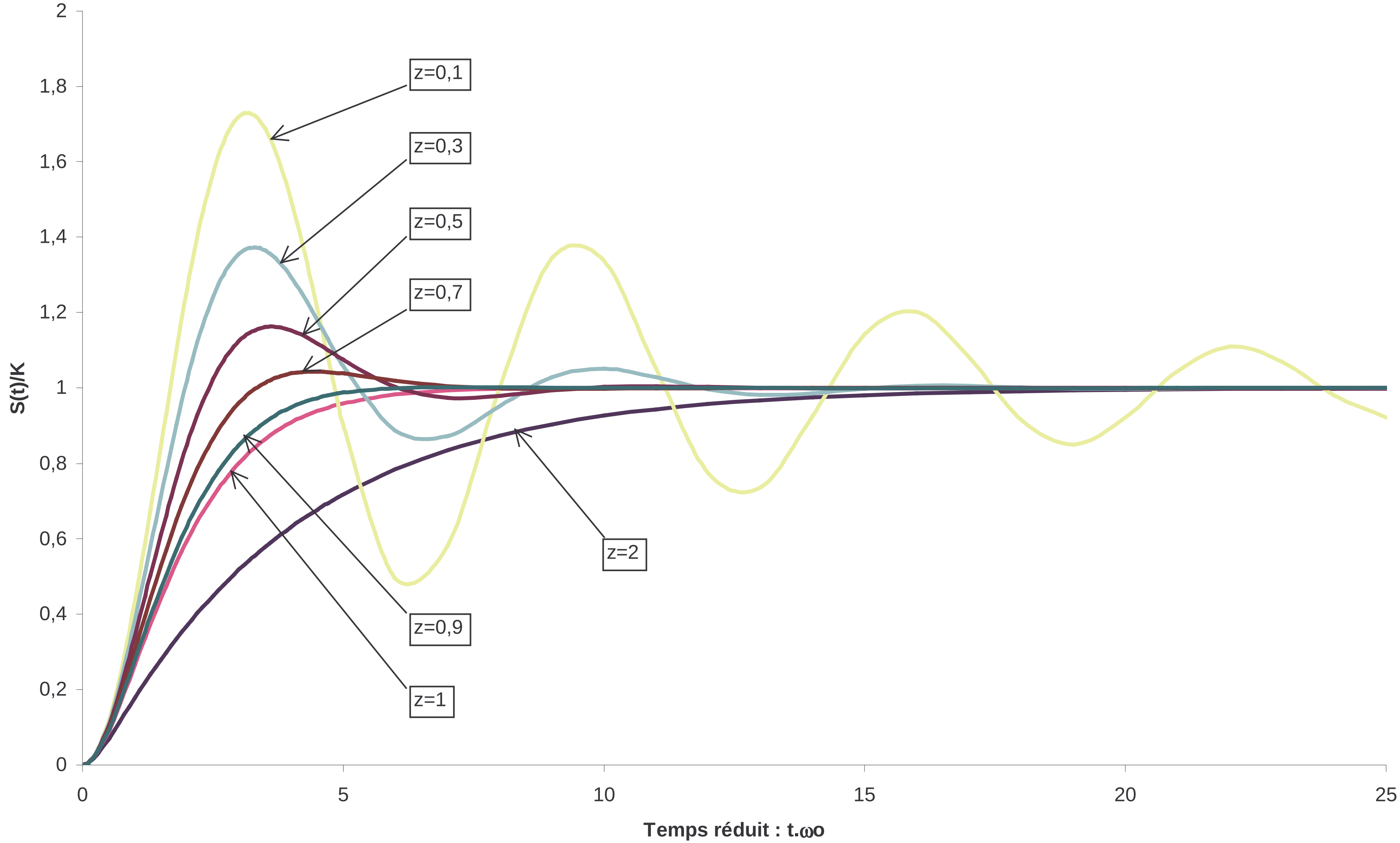
$D_{rk}=\left|\frac{s(\infty)-s(t_k)}{s(\infty)}\right|=\left|\frac{e^{-z\omega_0 t_k}}{\sqrt{1-z^2}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t_k+\varphi\right)\right|=e^{\frac{-zk\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$

Les dépassements relatifs ne dépendent donc que du coefficient d'amortissement z : $D_{rk}=e^{\frac{-zk\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$. On utilise cette particularité pour identifier z à partir d'un tracé expérimental modélisable par une fonction de transfert d'ordre 2. Le premier dépassement est retenu et on a : $z=\sqrt{\frac{(\ln D_{r1})^2}{\pi^2+(\ln D_{r1})^2}}$ avec $D_{r1}=\frac{D_1}{s(\infty)}$. Un abaque peut aussi être utilisé.

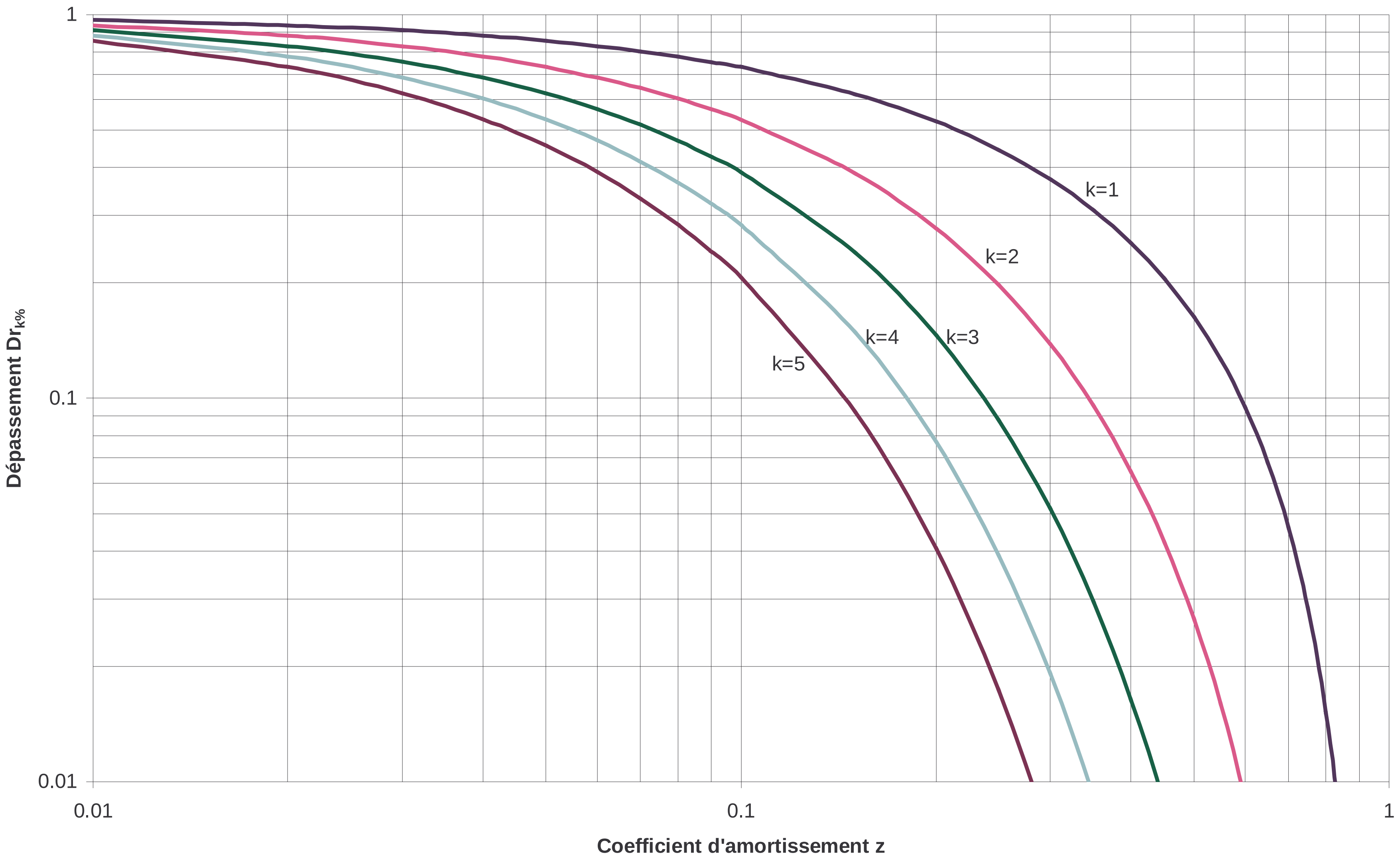
- Temps de réponse.

Il n'y a pas d'expression simple. Un abaque donne la valeur du temps de réponse réduit, $t_{5\%}.\omega_0$, en fonction du coefficient d'amortissement. Le temps de réponse minimum est obtenu pour un dépassement relatif de 5% ce qui correspond à un coefficient d'amortissement de valeur $z=0.7$. On a alors : $t_{5\%}.\omega_0=3$

Annexe 1 : Réponse indicielle d'un système du 2ème ordre.



Annexe 2 : Dépassements relatifs transitoires.



Annexe 3 : Temps de réponse réduit d'un système du 2ème ordre.